ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $\mathbb{K}$-δχ. $\mathbb{K}^n$ κ' έστω κανονική βάση $B=\{\vec{e_1},\vec{e_2},\dots,\vec{e_n}\}$ του $\mathbb{K}^n$. Αν θέσουμε $V_i=\langle\vec{e_i}\rangle=\{k\vec{e_i}\in\mathbb{K}^n \mid k\in\mathbb{K}\}=$
$\{(0,\dots,0,k,0,\dots,0)\in\mathbb{K}^n \mid k\in\mathbb{K}\}$.

Ισχυρισμός $\mathbb{K}^n = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$. Έστω $\vec{x_1}+\ldots+\vec{x_n} \in V_1+\ldots+V_n$

Τότε $\vec{x_i} \in V_i$, $1 \le i \le n$ και άρα $\vec{x_i} = (0,\ldots,0,k_i,0,\ldots,0)$, $k_i \in \mathbb{K}$

Τότε $\vec{x_1}+\vec{x_2}+\ldots+\vec{x_n} = (k_1,\ldots,k_n)$. Τότε $\vec{x_1}+\ldots+\vec{x_n} = \vec{0} \Rightarrow$

$(k_1,k_2,\ldots,k_n) = (0,\ldots,0) \Rightarrow k_i = 0 \Rightarrow \vec{x_i} = \vec{0}$, $1 \le i \le n$

Από πρόταση 2), το $V_1+\ldots+V_n$ είναι ευθύ

Προφανώς τότε $\mathbb{K}^n = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Έστω E: $\mathbb{K}$-δ.χ. $<\infty$ κ' V_1, V_2 υπόχωροι του E. Τότε

$\dim_{\mathbb{K}}(V_1+V_2) = \dim_{\mathbb{K}} V_1 + \dim_{\mathbb{K}} V_2 - \dim_{\mathbb{K}}(V_1 \cap V_2)$ *

Το άθροισμα των υποχώρων είναι ευθύ $\overset{3)}{\Leftrightarrow} V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\}$

$\Leftrightarrow \dim_{\mathbb{K}}(V_1 \cap V_2) = 0 \overset{*}{\Leftrightarrow} \dim_{\mathbb{K}}(V_1+V_2) = \dim_{\mathbb{K}} V_1 + \dim_{\mathbb{K}} V_2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

Στον $\mathbb{K}$-δ.χ. $M_n(\mathbb{K})$ των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{K}$ έστω $S_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = A\}$ κ'

$A_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = -A\}$.

Έστω $A \in S_n(\mathbb{K}) \cap A_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \begin{cases} {}^tA = A \\ {}^tA = -A \end{cases} \Rightarrow A = -A \Rightarrow 2A = 0 \Rightarrow A = 0$

Άρα $S_n(\mathbb{K}) \cap A_n(\mathbb{K}) = \{0\}$. Άρα το άθροισμα $S_n(\mathbb{K}) + A_n(\mathbb{K})$ είναι ευθύ. Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$. Θ.δ.ο. $A = B + \Gamma$ όπου $B \in S_n(\mathbb{K})$, $\Gamma \in A_n(\mathbb{K})$. Θέτουμε $B = ({}^tA + A)/2$ κ' $\Gamma = (A - {}^tA)/2$.

Τότε $A = B + \Gamma$ και έχουμε $B^t = {}^t\left(\frac{{}^tA + A}{2}\right) = \frac{{}^t({}^tA + A)}{2} =$

$\frac{{}^t({}^tA) + {}^tA}{2} = \frac{A + {}^tA}{2} = B \Rightarrow B \in S_n(\mathbb{K})$

Ομοίως για το Γ. Επομένως $M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) + A_n(\mathbb{K})$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Έστω $V_1, \ldots, V_k$ υπόχωροι του E. Αν $V_1 + \ldots + V_k$ είναι ευθύ $\Rightarrow$

$V_i \cap V_j = \{\vec{0}\}$, $1 \le i \ne j \le k$. (Το αντίστροφο δεν ισχύει για $k \ge 3$

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

$E = \mathbb{R}^2$, $V_1 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$

$V_2 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$

$V_3 = \{(z,z) \in \mathbb{R}^2 \mid z \in \mathbb{R}\}$.

$V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3 = \{(0,0)\}$ αλλά

$(1,0) \in V_1$, $(0,1) \in V_2$, $(-1,-1) \in V_3$.

$(1,0) + (0,1) + (-1,-1) = (0,0)$ αλλά $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3} \neq \vec{0}$.

Άρα το άθροισμα δεν είναι ευθύ

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $V_1, \ldots, V_k$ υπόχωροι του E: K-δχ κ' $\dim E < \infty$. Τότε το άθροισμα $V_1 + \ldots + V_k$ είναι ευθύ $\Leftrightarrow$ B_i: βάση V_i τότε

$B := \bigcup_{i=1}^{k} B_i$: βάση του $V_1 + \ldots + V_k$